# TD4 : Séries de Fourier

---

## Série de Fourier

### Exercice 1

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique et impaire tel que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \in ]0; \pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier
2. En déduire la valeurs des séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

### Exercice 2

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique tel que $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi; \pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

### Exercice 3

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique tel que $f(x) = (x-\pi)^2$ pour $x \in [0; 2\pi[$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

### Exercice 4

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique paire tel que $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$ pour $x \in [0; \pi]$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

### Exercice 5

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique impaire tel que $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0; \pi]$.

1. Déterminer ses coefficients de Fourier.
2. En déduire la valeurs de séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$